Modüler Akış ve Zaman Özdeşliği: Geometrik Yorumun İnce-Ayar Koşulları Üzerine

Muzaffer Enes Yünlü

Temmuz 2026

Özet

Tomita–Takesaki modüler teorisinde bir von Neumann cebiri ve siklik-ayırıcı bir vektör durumu verildiğinde, modüler otomorfizma grubu Δ^{it} tamamen cebirsel bir nesne olarak tanımlanır ve genel olarak var olur. Buna karşın bu akışın *geometrik* bir zaman evrimiyle — yani bölgenin noktalarını taşıyan bir diffeomorfizma ailesiyle — örtüşmesi evrensel bir olgu değildir. Bu makalede, Bisognano–Wichmann teoreminin somut formülü

$$\Delta_W^{it} = U(\Lambda_W(-2\pi t))$$

temel alınarak, modüler akışın geometrik yorumunun ancak bölgenin kendi simetri grubu altında değişmez kalması koşuluyla (yani "ince-ayarlı" simetri koşullarında) matematiksel olarak kurulabildiği; genel bölge ve durum çiftlerinde ise sol taraf (cebirsel modüler akış) var olmaya devam ederken sağ tarafın (geometrik akış) tanımsız kaldığı gösterilmektedir. Sonuç, modüler akışı zaman olarak yorumlayan programların (emergent time, holografik bulk zaman evrimi) geçerlilik sınırlarını netleştirmektedir.

---

1. Giriş

Kuantum alan teorisinde ve holografide modüler akışın zamansal bir evrim olarak yorumlanması yaygın bir sezgidir. Bu yorum, en güçlü matematiksel dayanağını Bisognano–Wichmann (BW) teoreminden alır: Minkowski vakumunda bir Rindler kaması (wedge) W için modüler akış, tam olarak o wedge'i sabitleyen Lorentz boost'unun üreteciyle çakışır. Bu makalenin amacı, bu özdeşliğin *neden* özel bir durum olduğunu — ve genel bir bölge/durum çifti için neden çökmesi gerektiğini — BW formülünün kendi yapısından hareketle göstermektir.

İddiamız şudur: modüler akışın geometrik yorumu bir *tanım* değil, belirli simetri aksiyomları altında kanıtlanan bir *teoremdir*; bu aksiyomlar sağlanmadığında geometrik yorumun karşılık geleceği matematiksel nesne tanımsız hale gelir.

2. Formalizm: Tomita–Takesaki Teorisi

Bir von Neumann cebiri $\mathcal{A}$ ve bu cebir için siklik ve ayırıcı bir vektör Ω verildiğinde, Tomita operatörü

$$S A\Omega = A^*\Omega, \qquad A \in \mathcal{A}$$

ile tanımlanır. Kutupsal ayrışım $S = J\Delta^{1/2}$ modüler eşleniği J ve modüler operatörü Δ verir. Modüler otomorfizma grubu

$$\sigma_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}$$

her zaman $\mathcal{A}$'yı kendi üzerine götüren bir tek-parametreli otomorfizma grubudur. Bu tanımda hiçbir uzay-zaman geometrisine, hiçbir dışsal zaman parametresine referans yoktur — Δ^{it} saf cebirsel bir nesnedir ve Reeh–Schlieder teoremi (yerellik + spektrum koşulu + vakum) sağlandığı sürece her zaman vardır.

3. Bisognano–Wichmann Teoremi

Minkowski uzay-zamanında bir wedge bölgesi $W = \{x : x^1 > |x^0|\}$ ve bu bölgeye karşılık gelen yerel cebir $\mathcal{A}(W)$ için BW teoremi şunu kanıtlar:

$$\Delta_W^{it} = U(\Lambda_W(-2\pi t)) \tag{1}$$

Burada $U(\Lambda_W(s))$, W'yi sabit bırakan tek-parametreli Lorentz boost alt-grubunun üniter gösterimidir. Bu formülün ispatı üç aksiyoma dayanır:

1. **Yerellik** (mikro-nedensellik),
2. **Spektrum koşulu** (pozitif enerji),
3. **Vakumun Poincaré-değişmezliği ve tekliği.**

Kritik nokta şudur: denklem (1)'in sol tarafı (Δ_W^{it}) tamamen cebirsel kökenlidir (Bölüm 2); sağ tarafı ($U(\Lambda_W)$) tamamen geometrik/grup-teorik kökenlidir (Poincaré grubunun gösterimi). BW teoremi bu iki *bağımsız tanımlı* nesnenin özdeş olduğunu gösterir — bu bir tanım değil, aksiyomlardan çıkan bir sonuçtur. Dolayısıyla "modüler akış = zaman" önermesi, en azından wedge + vakum konfigürasyonunda, döngüsel bir varsayım değildir.

4. Geometrikliğin Genel Tanımı

Formül (1)'i genelleştirmeden önce, "modüler akışın geometrik olması" ifadesini kesin hale getirmek gerekir.

Tanım. Bir bölge $\mathcal{O}$ ve durum Ω için modüler otomorfizma grubu σ_t *geometriktir* ancak ve ancak $\mathcal{O}$'nun nedensel tümleyenini sabit bırakan bir tek-parametreli diffeomorfizma ailesi φ_t var ise ve

$$\sigma_t(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)) = \mathcal{A}(\varphi_t(\mathcal{O}_1))$$

her alt-bölge $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ için sağlanıyorsa.

Bu tanım altında BW teoremi, $\mathcal{O} = W$ ve $\Omega = $ vakum için $\varphi_t = \Lambda_W(-2\pi t)$'nin bu koşulu sağladığını gösterir.

5. Genelleştirme Girişimi ve Kırılma Noktası

Formül (1)'i keyfi bir bölge $\mathcal{O}$ için yazmaya çalışalım:

$$\Delta_{\mathcal{O}}^{it} \stackrel{?}{=} U(\varphi_{\mathcal{O}}(-2\pi t)) \tag{2}$$

Sağ tarafın var olabilmesi için $\mathcal{O}$'yu sabit bırakan bir tek-parametreli simetri akışı $\varphi_{\mathcal{O}}$ gerekir — yani $\mathcal{O}$'nun kendi geometrik simetri grubunun bir üyesi.

Önerme (gerekli koşul). Denklem (2)'nin sağ tarafı ancak $\mathcal{O}$, arka plan uzay-zamanının (veya konformal olarak eşdeğerinin) izometri/konformal Killing grubu altında değişmez kalıyorsa tanımlıdır.

İspat notu. $U(\varphi_t)$ bir üniter gösterim gerektirir; bu da φ_t'nin arka plan simetri grubunun (Poincaré veya konformal grup) bir alt-grubu olmasını zorunlu kılar. $\mathcal{O}$ bu alt-grup altında değişmez değilse, $\varphi_t(\mathcal{O}) \neq \mathcal{O}$ olur ve $U(\varphi_t)$, $\mathcal{A}(\mathcal{O})$'yu kendi üzerine götürmez — dolayısıyla sağ taraf σ_t ile aynı türde bir otomorfizma olamaz. $\blacksquare$

Bu koşulun sağlandığı bilinen sınıf dardır:

| Bölge | Durum | Simetri | Geometrik mi? |

|---|---|---|---|

| Wedge W | Vakum | Boost | Evet (BW) |

| Küresel bölge / causal diamond | Vakum, konformal teori | Konformal boost | Evet (Hislop–Longo) |

| İki ayrık aralık | Vakum | Yok | Hayır |

| Keyfi şekilli bölge, konformal olmayan teori | Vakum | Yok | Hayır |

| Herhangi bir bölge | Uyarılmış (excited) durum | Genelde yok | Hayır |

Son üç satırda $\Delta_{\mathcal{O}}^{it}$ (sol taraf) Bölüm 2'nin genel teoremi gereği hâlâ iyi tanımlı bir otomorfizmadır; fakat $\varphi_{\mathcal{O}}$ diffeomorfizması mevcut olmadığından denklem (2)'nin sağ tarafı boş kümedir. Bu durumlarda modüler akış operatörleri noktadan noktaya taşımaz; bölgenin cebiri üzerinde non-lokal bir karışım üretir (Casini–Grillo–Pontello, Longo, Hollands–Xu).

6. Ana Sonuç

Yukarıdaki analiz aşağıdaki teoremin iskeletini verir:

Teorem (ince-ayar koşulu). Modüler akışın geometrik bir zaman evrimine karşılık gelmesi, bölgenin kendi arka plan simetri grubu altında değişmez kalmasını (yani bölge + durum çiftinin belirli, ölçüsü sıfır bir simetrik konfigürasyonlar sınıfına ait olmasını) *gerektirir*. Bu koşul sağlanmadığında, cebirsel modüler akış var olmaya devam eder, fakat hiçbir geometrik diffeomorfizma ile temsil edilemez.

Bu teorem, giriş bölümünde ifade edilen iddiayı ("modüler akış = zaman özdeşliği, sadece hassas simetri koşullarında ispatlanabilir; genel durumda geometrik bir zamana karşılık gelmez") tam olarak karşılamaktadır. Burada vurgulanması gereken, iddianın iki bölümünün farklı epistemik statüde olduğudur:

- **"Simetrik durumda geometriktir"** — BW teoremi ve konformal genellemeleri ile *tam olarak ispatlanmış*.

- **"Genel durumda geometrik değildir"** — somut karşı-örneklerle (ayrık bölgeler, konform olmayan teoriler, uyarılmış durumlar) *ispatlanmış*, fakat *tüm* bölge/durum/teori uzayını kapsayan tek bir kapsamlı sınıflandırma teoremi olarak literatürde henüz kapanmamıştır.

7. Fiziksel Sonuçlar

1. **Emergent time programları.** "Dolanıklıktan zaman doğar" türü önermeler, ancak Bölüm 5'teki simetri koşulu sağlandığında fiziksel içerik taşır; genel bir ilke olarak ileri sürülemez.

2. **Holografi.** JLMS formülü ve bulk modüler akış = sınır modüler akış eşitlikleri, RT/HRT yüzeyleri ve sabit-zaman dilimleri gibi simetrik konfigürasyonlarda kurulmuştur; bu teorem söz konusu sonuçların neden bu sınıfın ötesine doğrudan genellenemediğini açıklar.

3. **Von Neumann cebirleri sınıflandırması.** Tip III$_1$ faktörler bağlamında, hangi (cebir, durum) çiftlerinin geometrik modüler otomorfizma grubuna sahip olduğunu karakterize eden tam bir kriter, açık bir araştırma sorusu olarak durmaktadır.

8. Sonuç

Bisognano–Wichmann formülü $\Delta_W^{it} = U(\Lambda_W(-2\pi t))$, sol tarafın cebirsel, sağ tarafın geometrik kökenli olması nedeniyle, modüler akış-zaman özdeşliğinin döngüsel bir varsayım olmadığını, aksiyomlardan çıkan bir teorem olduğunu gösterir. Aynı formülün genellemesi denendiğinde, sağ tarafın tanım kümesinin bölgenin simetri grubuyla sınırlı olduğu görülür; bu da modüler akışın geometrik yorumunun genel değil, ince-ayarlı bir olgu olduğunu matematiksel olarak temellendirir.

Kaynakça

- J. J. Bisognano, E. H. Wichmann, "On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field," *J. Math. Phys.* **16**, 985–1007 (1975). DOI: 10.1063/1.522605.

- P. D. Hislop, R. Longo, "Modular Structure of the Local Algebras Associated with the Free Massless Scalar Field Theory," *Commun. Math. Phys.* **84**, 71–85 (1982). DOI: 10.1007/BF01208372.

- H. Casini, S. Grillo, D. Pontello, "Relative entropy for coherent states from Araki formula," *Phys. Rev. D* **99**, 125020 (2019). arXiv:1903.00109.

- S. Hollands, K. Sanders, *Entanglement Measures and Their Properties in Quantum Field Theory*, SpringerBriefs in Mathematical Physics, Vol. 34, Springer (2018). ISBN 978-3-319-94901-7.

- R. Longo, F. Xu, "Comment on the Bekenstein Bound," *J. Geom. Phys.* **130**, 113–120 (2018). arXiv:1802.07184.

- R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, 2nd ed., Springer (1996).